ANALISIS KEPERIODIKAN SISTEM JARINGAN ANTREAN *MULTICHANNEL* TAK - SIKLIK 5 SERVER

Oleh:

SRI REJEKI PURI WAHYU PRAMESTHI

FANNY ADIBAH

IKIP Widya Darma Surabaya

Abstrak: Pada makalah ini akan membahas tentang aplikasi Aljabar Max – Plus pada sistem jaringan antrean, khususnya sistem jaringan antrean multichannel tak – siklik 5 server. Peubah yang di ukur yaitu sistem jaringan antrean multichannel tak-siklik dengan 5 server dengan menggunakan aljabar max-plus interval. Prosesnya dimulai dengan mengkonstruksi sistem jaringan antrean multichannel tak-siklik 5 server, memperoleh matriks adjasennya dengan lama waktu berupa interval, memperoleh nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval, dan analisis keperiodikan sistem jaringan antrean multichannel tak-siklik 5 server. Hasil penelitian ini memperoleh sistem jaringan antrean multichannel tak-siklik 5 server yang periodik.

Kata Kunci: Aljabar Max-Plus Interval, Antrean, Multichannel Tak-Siklik, Sistem Periodik.

PENDAHULUAN

Pada saat berbelanja, membeli bensin, membeli tiket nonton bioskop, membayar tiket jalan tol, membeli makanan minuman cepat saji dan sebagainya. Tidak jarang terdapat antrean yang cukup panjang, meskipun loket – loket yang disediakan oleh penyedia layanan di buka secara maksimal. Pernah juga kita menunggu cukup lama untuk mendapatkan pelayanan. Antrean sudah menjadi hal biasa dalam kehidupan sehari – hari kita.

Aljabar Max-Plus merupakan salah satu teknik analisis pengkajian dari sistem event diskrit (SED) yang mempunyai banyak aplikasi pada teori sistem, kontrol optimal dan petri net [Subiono, 2009]. Pendekatan dengan menggunakan aljabar max-plus dapat digunakan untuk menentukan dan menganalisis berbagai sifat dari sistem yang dibuat, tetapi hanya bisa diterapkan pada sebagian klas SED yang bisa diuraikan dengan model waktu invariant max-linier. Aljabar max-plus sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan seperti transportasi, manufakturing, penjadwalan, sistem antrian, lalu lintas dan lain sebagainya.

Pada makalah ini membahas tentang aplikasi Aljabar Max – Plus pada sistem jaringan antrean, khususnya sistem jaringan antrean *multichannel* tak – siklik 5 server. Prosesnya dimulai dengan mengkonstruksi sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server, memperoleh matriks adjasennya dengan lama waktu berupa interval, memperoleh nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval, dan analisis keperiodikan sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server.

TUJUAN PENELITIAN

Dapat memperoleh sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server yang periodik dengan menggunakan Aljabar Max – Plus Interval.

LANDASAN TEORI

Struktur Antrean

Atas dasar sifat proses pelayanannya, dapat diklasifikasikan fasilitas – fasilitas pelayanan dalam susunan saluran atau *channel* (*single* atau *multiple*) dan *phase* (*single* atau *multiple*) yang membentuk suatu struktur antrean yang berbeda – beda. Istilah saluran atau *channel* menunjukkan jumlah alur (tempat) untuk memasuki sistem pelayanan, yang juga menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan. Istilah *place* berarti jumlah loket pelayanan, dimana para langganan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap (Subagyo, 2000:270).

Sistem *multi channel – single phase* terjadi kapan saja, dimana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrean tunggal, sebagai contoh model ini adalah antrean pada *teller* sebuah bank, potong rambut oleh beberapa tukang potong, dan sebagainya.

Notasi dan Definisi Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus merupakan himpunan $\mathbb{R}_{max}$ dengan dua operasi biner yaitu maksimum yang dinotasikan $\oplus$ dan tambah yang dinotasikan $\otimes$ yang dinyatakan dengan $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$. Himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Didefinisikan $\varepsilon = -\infty$ adalah elemen netral dan e = 0 adalah elemen satuan. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$.

Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus dan aljabar biasa terdapat analogi yang jelas di satu sisi. Dengan menggunakan notasi – notasi dalam aljabar max-plus diberikan persamaan keadaan dalam bentuk:

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \quad \text{……………………………………………….. (2.1)}$$

Vektor $x \in \mathbb{R}_{max}^n$ menyatakan keadaan dari model dan $x(k)$ menyatakan keadaan saat ke – k. Sedangkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Bila diberikan keadaan awal $x(0) = x_0$, maka evolusi keadaan mendatang dari persamaan (2.1) dapat ditentukan. Jika persamaan (2.1) ditulis dalam bentuk persamaan skalar diperoleh:

$$x_i(k+1) = \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes x_j(k), i = 1,2, \dots, n\, ;\ k = 0,1, \dots \quad \text{…………………..(2.2)}$$

Secara umum, evolusi waktu dari (2.1) dan (2.2) berbeda. Pada persamaan (2.1), argumen k pada $x(k)$ menyatakan pengulangan berapa banyak waktu pada titik – titik yang sudah aktif. Sedangkan pada persamaan (2.2), argumen k pada $x(k)$ menyatakan waktu ke-k pada keadaan $x(k)$. Sebagai contoh, pada jaringan kerja yang terdiri dari beberapa titik dan beberapa garis yang terhubung dengan titik – titik tersebut, jaringan kerja yang berhubungan dengan persamaan (2.1) mempunyai n titik yang diwakili oleh setiap x_i. Sedangkan a_{ij} berkaitan dengan bobot garis dari titik j ke titik i bila garis ini ada. Titik dalam jaringan kerja berperan dengan aktivitas tertentu. Aktivitas – aktivitas ini membutuhkan waktu berhingga disebut waktu aktivitas.

Diasumsikan aktivitas pada titik tertentu hanya dapat dimulai jika semua aktivitas yang mendahuluinya sudah menyelesaikan aktivitasnya dan mengirimkan hasilnya sepanjang garis yang menghubungkan titik tersebut. Jadi garis yang berkaitan dengan a_{ij} dapat ditafsirkan sebagai saluran output untuk titik i dan secara bersamaan sebagai saluran input untuk titik j. Elemen a_{ij} dari matriks A menunjukkan waktu tunggu dari aktivitas i

untuk memulai kegiatannya saat yang ke-$(k+1)$ setelah aktivitas j menyelesaikan kegiatannya dan mengirimkan hasilnya ke aktivitas i pada saat yang ke-k. Bila elemen $a_{ij} = \varepsilon$, maka hal ini menunjukkan bahwa aktivitas i tidak bergantung pada aktivitas j. Suatu perluasan dari (2.1) dinyatakan dengan notasi – notasi aljabar max-plus sebagai berikut:

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k)$$

$$y(k) = C \otimes x(k) \quad \text{...(2.3)}$$

Dimana $u(k)$ merupakan input sedangkan $y(k)$ merupakan output. Pada jaringan kerja, $u(k)$ suatu vektor yang menunjukkan sumber daya tertentu tersedia pada waktu ke-k sedangkan vektor $y(k)$ menyatakan saat dimana produk akhir dari jaringan kerja ditawarkan pada dunia luar.

Pengertian nilai-karakteristik dan vektor-karakteristik yang bersesuaian dari suatu matriks bujur sangkar A berukuran $n \times n$ sebagaimana dijumpai dalam aljabar max-plus biasa juga dijumpai dalam aljabar max-plus. Nilai karakteristik $\lambda \in \mathbb{R}$ dan vektor karakteristik $x \in \mathbb{R}^n_{max}$ dengan $x \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ memenuhi

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \quad \text{...(2.4)}$$

Diasumsikan bahwa vektor awal $x(0) = x_0$ sama dengan vektor eigen $v \in \mathbb{R}^n_{max}$ yang bersesuaian dari matriks bujur sangkar A berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen λ. Sehingga penyelesaian persamaan keadaan (2.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x(k+1) = \lambda^{\otimes k+1} \otimes x_0 \quad \text{...(2.5)}$$

Nilai eigen λ dapat ditafsirkan sebagai 6 ı periodik dari sistem, yaitu setiap titik dari jaringan kerja yang sesuai menjadi akhir setiap λ satuan (Subiono,2000).

Aljabar Max-Plus Interval

Pada bagian ini diberikan dasar aljabar max-plus interval yang merupakan perluasan dari aljabar max-plus. Interval tertutup x dalam $\mathbb{R}_{max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}_{max}$ yang berbentuk $x = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid x \in \mathbb{R}_{max},\ \underline{x} \preccurlyeq_m x \preccurlyeq_m \bar{x}\}$. Interval x dalam $\mathbb{R}_{max}$ tersebut disebut Interval Max-Plus. Didefinisikan $I(\mathbb{R})_\varepsilon := \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R},\ \varepsilon \preccurlyeq_m \underline{x} \preccurlyeq_m \bar{x}\} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada $I(\mathbb{R})_\varepsilon$, didefinisikan untuk $\forall\, x, y \in I(\mathbb{R})_\varepsilon$ operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan $x \mathbin{\overline{\oplus}} y = [\underline{x} \oplus \underline{y},\ \bar{x} \oplus \bar{y}]$ dan $x \mathbin{\overline{\otimes}} y = [\underline{x} \otimes \underline{y},\ \bar{x} \otimes \bar{y}]$. $I(\mathbb{R})_\varepsilon$ merupakan semiring idempotent komutatif dengan elemen netral $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $0 = [0,0]$. Semiring idempotent komutatif $(I(\mathbb{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut aljabar max-plus interval yang dinotasikan dengan $I(\mathbb{R})_{max}$ (Rudhito dkk, 2008).

Matriks Interval

Untuk $A \in I(\mathbb{R})_{max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ berturut – turut yaitu matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A. Didefinisikan $I(\mathbb{R})_{max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in I(\mathbb{R})_{max}\}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Matriks anggota $I(\mathbb{R})_{max}^{m \times n}$ disebut matriks interval max-plus.

Operasi penjumlahan matriks interval $A, B \in I(\mathbb{R})_{max}^{m \times n}$, dinotasikan dengan $A \overline{\oplus} B$, didefinisikan

$(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Operasi perkalian matriks interval $A \in I(\mathbb{R})_{max}^{m \times n}$ dengan skalar $\alpha \in I(\mathbb{R})_{max}$, didefinisikan

$\alpha \overline{\otimes} A$ dengan $(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$.

Untuk perkalian dua matriks interval $A \in I(\mathbb{R})_{max}^{m \times p}, B \in I(\mathbb{R})_{max}^{p \times n}$ didefinisikan $A \overline{\otimes} B$ dengan $(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \overline{\bigoplus}_{k=1}^{p} A_{ik} \overline{\oplus} B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

$(I(\mathbb{R})_{max}^{n \times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j dan elemen satuan adalah matriks E dengan

$$(E)_{ij} := \begin{cases} 0, & i = j; \\ \varepsilon, & i \neq j. \end{cases}$$

$I(\mathbb{R})_{max}^{m \times n}$ merupakan semimodul dari $I(\mathbb{R})_{max}$.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Interval

Algoritma 2.1. Algoritma Power (Subiono, 2000)

a. Ambil sebarang vektor awal $x(0) = x_0 \neq u[\varepsilon]$, yaitu x_0 mempunyai minimal satu elemen berhingga.
b. Iterasi $x(k+1) = A \otimes x(k)$ hingga ada bilangan bulat p, q dengan $p > q \geq 0$ dan sebuah bilangan real c sehingga $x(p) = x(q) \otimes c$, hingga suatu nilai periodik didapatkan.
c. Hitung nilai eigen $\lambda = \frac{c}{p-q}$.

d. Hitung vektor eigen $v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1))$

DEFINISI 2.1

Diberikan $A \in I(\mathbb{R})_{max}^{n \times n}$, skalar interval $\lambda \in I(\mathbb{R})_{max}$ disebut nilai eigen max-plus interval matriks interval A jika terdapat suatu vektor interval $v \in I(\mathbb{R})_{max}^{n}$ dengan $v \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $A \overline{\otimes} v = \lambda \overline{\otimes} v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen max-plus interval matriks interval A yang bersesuaian dengan λ.

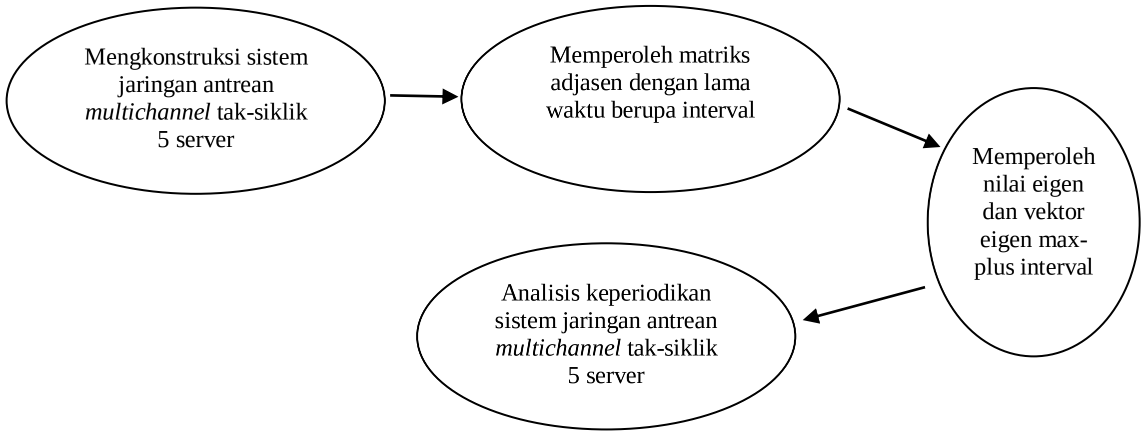
DEFINISI 2.2

Suatu matriks interval $A \in I(\mathbb{R})_{max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ dikatakan irreducible jika setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ irreducible.

METODE

Peubah yang di ukur yaitu sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik dengan 5 server dengan menggunakan aljabar max-plus interval. Prosesnya dimulai dengan mengkonstruksi sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server, memperoleh matriks adjasennya dengan lama waktu berupa interval, memperoleh nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval, dan analisis keperiodikan sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server.

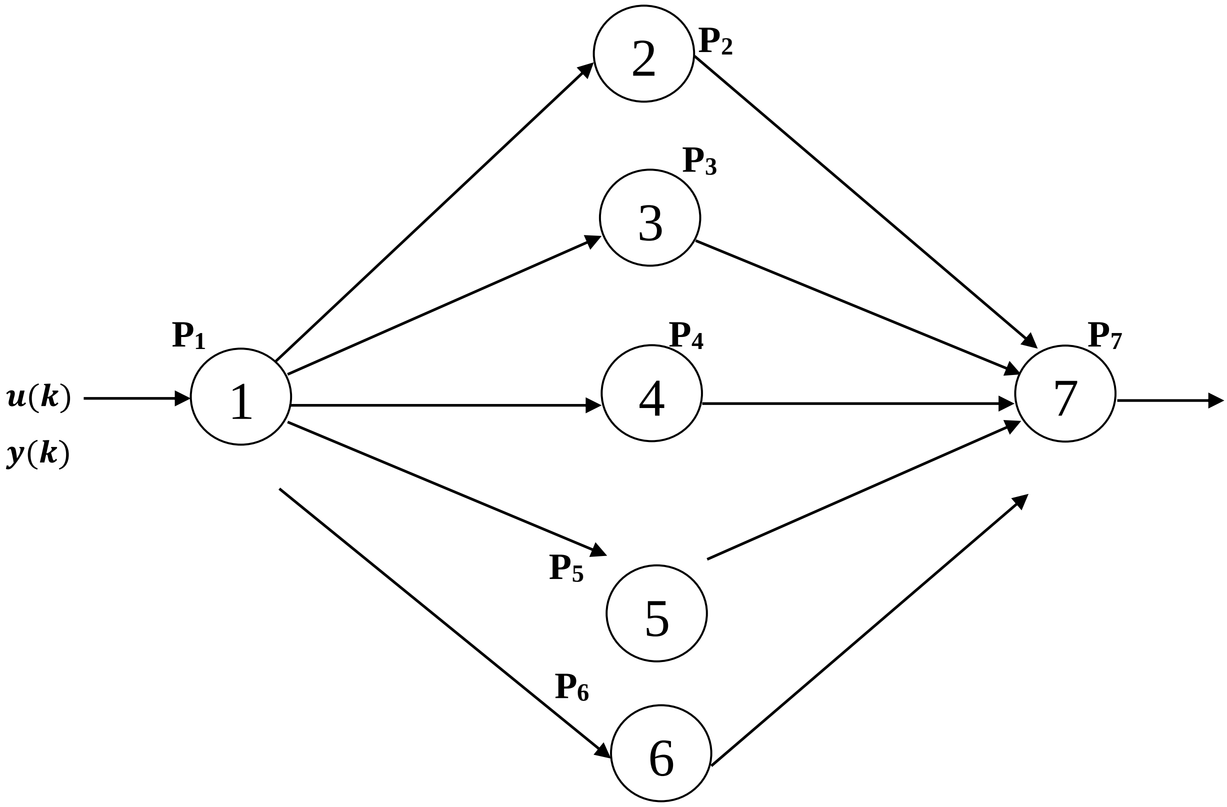
Berikut rangkaian proses penelitian:



HASIL DAN PEMBAHASAN

Konstruksi Sistem Jaringan Antrean *Multichannel* Tak-Siklik 5 Server

Dalam konstruksi sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server diberikan sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik dengan jumlah server sebanyak 5 server. Sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server ini terdiri dari sebuah *place* kedatangan pengunjung, 5 buah *place* server, dan sebuah *place* pengunjung yang telah selesai mendapatkan pelayanan. Berikut ini merupakan gambar sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server:



Gambar di atas merupakan gambar sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server. Gambar tersebut menunjukkan bahwa terdapat 7 *place* dimana *place* 1 (P_1) merupakan *place* kedatangan pengunjung (tempat pengunjung mengantre atau tempat pengunjung menunggu waktu untuk mendapatkan pelayanan), *place* 2 (P_2), *place* 3 (P_3), *place* 4 (P_4), *place* 5 (P_5), dan *place* 6 (P_6) merupakan *place* server (tempat pengunjung mendapatkan pelayanan) serta *place* 7 (P_7) merupakan *place* pengunjung yang telah mendapatkan pelayanan.

Sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server ini diasumsikan bahwa keadaan awal sistem adalah kosong dalam artian dimana tidak terdapat antrean untuk pengunjung dan tidak sedang dalam proses pelayanan, kapasitas pada *place* 1 (P_1) yaitu *place* kedatangan pengunjung adalah tak-berhingga. Selain itu, diasumsikan juga bahwa pelayanan tidak pernah mengalami gangguan artinya sistem pelayanan selalu aktif (on) serta waktu pelayanan di *place* server yaitu di *place* 2 (P_2), *place* 3 (P_3), *place* 4 (P_4), *place* 5 (P_5), dan *place* 6 (P_6) diasumsikan sama. Setiap siklus pada sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server dapat memberikan pelayanan kepada pengunjung sebanyak 5 pengunjung di masing – masing *place* server di *place* 2 (P_2), *place* 3 (P_3), *place* 4 (P_4), *place* 5 (P_5), dan *place* 6 (P_6). Pada setiap *place* server melayani 1 pengunjung dengan diberikan waktu pelayanan yang sama. Jika pengunjung ke – k telah mendapatkan pelayanan di *place* server dan berada di *place* 7 (P_7), maka di waktu yang bersamaan pengunjung berikutnya yaitu pengunjung ke – $(k+1)$ yang berada di *place* 1 (P_1) akan mendapatkan pelayanan di *place* server yaitu di *place* 2 (P_2), *place* 3 (P_3), *place* 4 (P_4), *place* 5 (P_5), dan *place* 6 (P_6).

Dalam sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server yang gambarnya telah di berikan pada gambar 4.1 terdapat $u(k)$ dan $y(k)$, $u(k)$ adalah waktu kedatangan pengunjung ke – k sedangkan $y(k)$ adalah waktu pengunjung ke – k yang telah selesai mendapatkan pelayanan. Oleh karena pengunjung ke – k yang telah mendapatkan pelayanan di *place* server dan berada di *place* 7 (P_7) dan di waktu yang bersamaan pengunjung berikutnya yaitu pengunjung ke – $(k+1)$ yang berada di *place* 1 (P_1) akan mendapatkan pelayanan di *place* server yaitu di *place* 2 (P_2), *place* 3 (P_3), *place* 4 (P_4), *place* 5 (P_5), dan *place* 6 (P_6), maka diasumsikan bahwa $u(k+1) = y(k)$.

Misal $u(k)$ adalah waktu kedatangan pengunjung ke – k, B adalah lama waktu kedatangan pengunjung, $x_i(k+1)$ adalah waktu kedatangan pengunjung ke – $(k+1)$ pada titik i dimana titik i menyatakan *place* pada sistem, karena jumlah *place* pada sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server yaitu 7 *place*, maka $i = 1, 2, \ldots, 7$. Sedangkan k merupakan siklus dari sistem dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$. A_{ij} adalah lama waktu pada sistem, dan $y(k)$ adalah waktu pengunjung ke – k yang telah mendapatkan pelayanan, serta C adalah lama waktu pengunjung yang selesai dilayani. Jika dimisalkan $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)]^T$ untuk persamaan $x_i(k+1) = A_{ij} \otimes x_i(k) \oplus B \otimes u(k)$, maka dapat diberikan persamaan keadaan berikut ini:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Oleh karena diasumsikan bahwa $u(k+1) = y(k)$, maka

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

sehingga

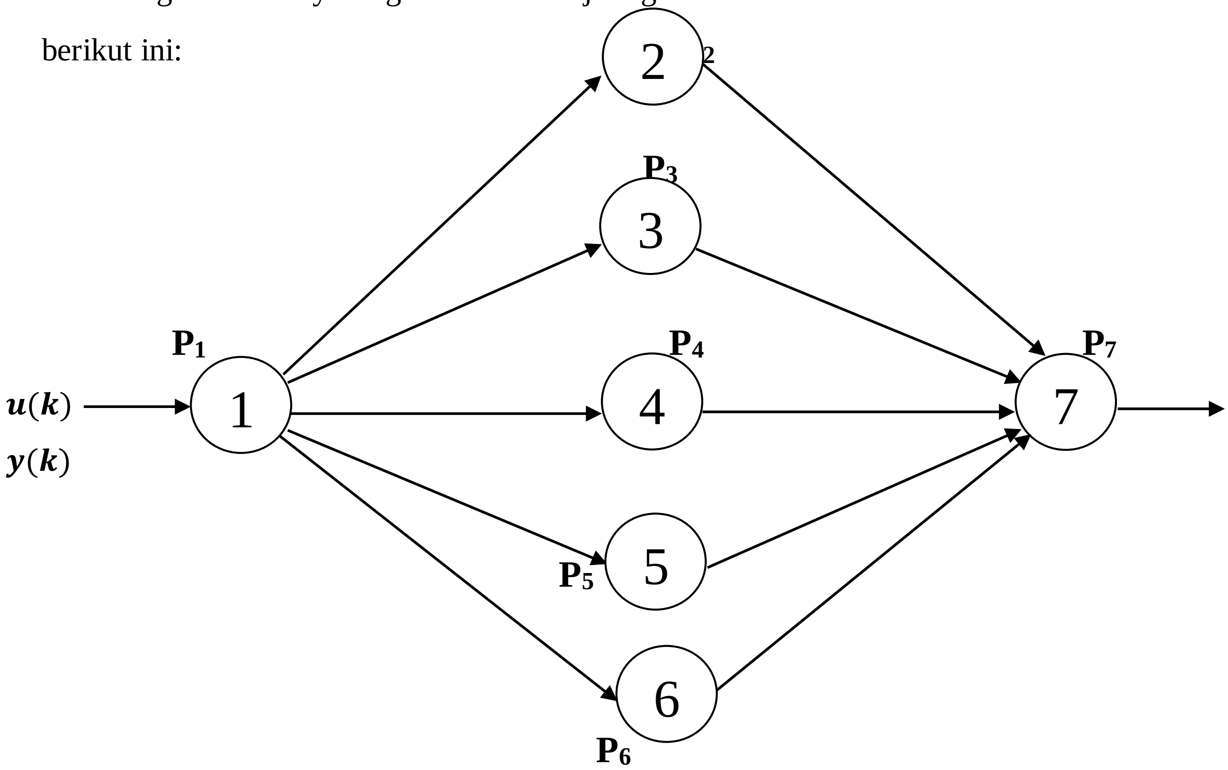
$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes C \otimes x(k)$$

jadi diperoleh persamaan keadaan

$x(k+1) = (A \oplus B \otimes C) \otimes x(k)$ (4.3)

Matriks Adjasen Sistem Jaringan Antrean *Multichannel* Tak-Siklik 5 Server

Dari gambar 4.1 yaitu gambar sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server berikut ini:



Berdasarkan arti himpunan edges yakni suatu *arc* dari titik *j* ke titik *i* ada bila $a_{ij} \neq \varepsilon$, *arc* ini dinotasikan dengan (j, i), dan jika tidak terdapat garis (j, i), maka $a_{ij} \coloneqq \varepsilon$.

Sehingga dapat diperoleh matriks A yakni matriks adjasen lama waktu pada sistem dengan $t_1(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_1, $t_2(k)$ = lama waktu dari P_2 ke P_2, $t_3(k)$ = lama waktu dari P_3 ke P_3, $t_4(k)$ = lama waktu dari P_4 ke P_4, $t_5(k)$ = lama waktu dari P_5 ke P_5, $t_6(k)$ = lama waktu dari P_6 ke P_6, $t_7(k)$ = lama waktu dari P_7 ke P_7, $t_1(k) \otimes t_2(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_2, $t_1(k) \otimes t_3(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_3, $t_1(k) \otimes t_4(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_4, $t_1(k) \otimes t_5(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_5, $t_1(k) \otimes t_6(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_6, $t_2(k) \otimes t_7(k)$ = lama waktu dari P_2 ke P_7, $t_3(k) \otimes t_7(k)$ = lama waktu dari P_3 ke P_7, $t_4(k) \otimes t_7(k)$ = lama waktu dari P_4 ke P_7, $t_5(k) \otimes t_7(k)$ = lama waktu dari P_5 ke P_7, $t_6(k) \otimes t_7(k)$ = lama waktu dari P_6 ke P_7, dan $t_1(k) \otimes [t_2(k) \oplus t_3(k) \oplus t_4(k) \oplus t_5(k) \oplus t_6(k)] \otimes t_7(k)$ = lama waktu dari P_1 ke P_7 adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} t_1(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \otimes t_2(k) & t_2(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \otimes t_3(k) & \varepsilon & t_3(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \otimes t_4(k) & \varepsilon & \varepsilon & t_4(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \otimes t_5(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_5(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \otimes t_6(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_6(k) & \varepsilon \\ t_1(k) \otimes [t_2(k) \oplus t_3(k) \oplus t_4(k) \oplus t_5(k) \oplus t_6(k)] \otimes t_7(k) & t_2(k) \otimes t_7(k) & t_3(k) \otimes t_7(k) & t_4(k) \otimes t_7(k) & t_5(k) \otimes t_7(k) & t_6(k) \otimes t_7(k) & t_7(k) \end{pmatrix}$$

Jika lama waktu di *place* i untuk pengunjung ke – k berupa interval waktu, maka matriks interval A menjadi matriks A yaitu matriks adjasen interval lama waktu dari sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} t_1(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \overline{\otimes} t_2(k) & t_2(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \overline{\otimes} t_3(k) & \varepsilon & t_3(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \overline{\otimes} t_4(k) & \varepsilon & \varepsilon & t_4(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \overline{\otimes} t_5(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_5(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ t_1(k) \overline{\otimes} t_6(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_6(k) & \varepsilon \\ t_1(k) \overline{\otimes} [t_2(k) \overline{\oplus} t_3(k) \overline{\oplus} t_4(k) \overline{\oplus} t_5(k) \overline{\oplus} t_6(k)] \overline{\otimes} t_7(k) & t_2(k) \overline{\otimes} t_7(k) & t_3(k) \overline{\otimes} t_7(k) & t_4(k) \overline{\otimes} t_7(k) & t_5(k) \overline{\otimes} t_7(k) & t_6(k) \overline{\otimes} t_7(k) & t_7(k) \end{pmatrix}$$

Misal berikut ini diberikan interval lama waktu di *place* i untuk pengunjung ke – k:

$t_1(k) = [5,9]$, $t_2(k) = [10,14]$, $t_3(k) = [10,14]$, $t_4(k) = [10,14]$, $t_5(k) = [10,14]$, $t_6(k) = [10,14]$, $t_7(k) = [3,5]$.

Sehingga diperoleh matriks interval **A** sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [5,9] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [5,9] \overline{\otimes} [10,14] & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [5,9] \overline{\otimes} [10,14] & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [5,9] \overline{\otimes} [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [5,9] \overline{\otimes} [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon \\ [5,9] \overline{\otimes} [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon \\ [5,9] \overline{\otimes} [[10,14] \overline{\oplus} [10,14] \overline{\oplus} [10,14] \overline{\oplus} [10,14] \overline{\oplus} [10,14]] \overline{\otimes} [3,5] & [10,14] \overline{\otimes} [3,5] & [10,14] \overline{\otimes} [3,5] & [10,14] \overline{\otimes} [3,5] & [10,14] \overline{\otimes} [3,5] & [10,14] \overline{\otimes} [3,5] & [3,5] \end{pmatrix}$$

Jika matriks interval **A** yaitu matriks adjasen interval lama waktu pada sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server dilakukan pengoperasian dengan menggunakan operasi dari aljabar max – plus interval yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$ serta pada $I(\mathbb{R})_\varepsilon$, didefinisikan untuk $\forall\, x, y \in I(\mathbb{R})_\varepsilon$ operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan $x \;\overline{\oplus}\; y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan $x \;\overline{\otimes}\; y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$, maka dapat diperoleh matriks interval **A** yaitu matriks adjasen interval lama waktu pada sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server berikut ini:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [5,9] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon \\ [18,28] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [3,5] \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, setelah diperoleh matriks interval **A** yaitu matriks adjasen interval lama waktu pada sistem jaringan antrean *multichannel* tak-siklik 5 server, berikut ini diberikan interval lama waktu kedatangan $B =$ [6,10] dan interval lama waktu pengunjung yang telah selesai mendapatkan pelayanan C = [5,7]. Sehingga diperoleh matriks interval ***B*** dan matriks interval ***C*** berikut ini:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} [6,10] \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{C} = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad [5,7]).$$

Apabila telah ditentukan matriks interval **A**, matriks interval **B** serta matriks interval **C**, maka dapat diperoleh matriks dengan mengoperasikan matriks interval **A**, matriks interval **B** dan matriks interval **C** dengan menggunakan operasi aljabar max – plus sesuai dengan hasil persamaan keadaan (4.3) yakni $x(k+1) = (A \oplus B \otimes C) \otimes x(k)$. Sehingga hasil operasi dari $A \oplus B \otimes C$ (misal hasil dari $A \oplus B \otimes C = D$) adalah matriks interval **D** sistem jaringan antrean *multichannel* tak – siklik 5 server sebagai berikut :

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} [5,9] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [11,17] \\ [15,23] & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon \\ [18,28] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [3,5] \end{pmatrix}$$

Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Interval

Dari persamaan $x(k+1) = D \otimes x(k)$ dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$, Matriks **D** adalah matriks $n\, x\, n$. Dapat ditentukan dengan menghitung suatu bilangan skalar berhingga $\curlywedge \in \mathbb{R}$ dan suatu vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga persamaan:

$$\boldsymbol{D} \otimes v = \curlywedge \otimes v \qquad (4.4)$$

terpenuhi. Untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks dengan menggunakan cara biasa memerlukan perhitungan yang banyak dan lama. Oleh karena itu, muncul adanya perhitungan numerik untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks. Berikut ini diberikan algoritma yang menyatakan cara mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dengan cara iterasi.

Algoritma 4.1 Algoritma Power (Subiono, 2000).

i. Ambil sebarang vektor awal $x(0) = x_0 \neq \boldsymbol{u}[\mathcal{E}]$, yaitu x_0 mempunyai minimal satu elemen berhingga.

ii. Iterasi $x(k+1) = D \otimes x(k)$ hingga ada bilangan bulat p, q dengan $p > q \geq 0$ dan sebuah bilangan real c sehingga $x(p) = x(q) \otimes c$, hingga suatu nilai periodik didapatkan.

iii. Hitung nilai eigen $\curlywedge = \frac{c}{p-q}$.

iv. Hitung vektor eigen $v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\curlywedge^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1))$.

Dengan matriks **D** yaitu:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} [5,9] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [11,17] \\ [15,23] & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon & \varepsilon \\ [15,23] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [10,14] & \varepsilon \\ [18,28] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [13,19] & [3,5] \end{pmatrix}.$$

Matriks **D** terdiri dari matriks batas bawah

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 \\ 15 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon \\ 18 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

dan matriks batas atas

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ 23 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon \\ 28 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ambil $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sebagai vektor keadaan awal masing –masing matriks interval.

Iterasi persamaan $x(k+1) = \boldsymbol{D} \otimes x(k)$ dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$, didapatkan:

a. Untuk matriks batas bawah

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 \\ 15 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon \\ 18 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Ambi$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$l dimana $x(0) = x_0 \neq \boldsymbol{u}[\varepsilon]$.

Iterasinya didapatkan sebagai berikut ini:

$x(0)$ $x(1)$ $x(2)$ $x(3)$ 29 $\otimes$ $x(1)$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}11\\15\\15\\15\\15\\15\\18\end{pmatrix};\begin{pmatrix}29\\26\\26\\26\\26\\26\\29\end{pmatrix};\begin{pmatrix}40\\44\\44\\44\\44\\44\\47\end{pmatrix} = 29\otimes\begin{pmatrix}11\\15\\15\\15\\15\\15\\18\end{pmatrix}$$

Dengan demikian $p = 3, q = 1$ dan $c = 29$ sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{29}{3-1} = 14{,}5.$$

Dengan vektor eigen

$$v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1))$$

$$v = \bigoplus_{j=1}^{2} (\lambda^{\otimes(2-j)} \otimes x(1+j-1))$$

$$v = \left(\lambda^{\otimes(2-1)} \otimes x\,(1+1-1) \oplus \lambda^{\otimes(2-2)} \otimes x\,(1+2-1)\right)$$

$$v = (14{,}5^{\otimes(1)} \otimes x(1)) \oplus ((14{,}5^{\otimes(0)} \otimes x(2))$$

$$v = 14{,}5 \otimes x(1) \oplus 0 \otimes x(2)$$

$$v = 14{,}5 \otimes \begin{pmatrix}11\\15\\15\\15\\15\\15\\18\end{pmatrix} \oplus 0 \otimes \begin{pmatrix}29\\26\\26\\26\\26\\26\\29\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}25{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\32{,}5\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}29\\26\\26\\26\\26\\26\\29\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}29\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\32{,}5\end{pmatrix}$$

Hasil diatas dapat ditunjukkan bahwa memenuhi persamaan (4.4) sehingga

$$\underline{D} \otimes v = \begin{pmatrix}5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11\\ 15 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 15 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon\\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon\\ 18 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}29\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\29{,}5\\32{,}5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 43{,}5 \\ 44 \\ 44 \\ 44 \\ 44 \\ 44 \\ 47 \end{pmatrix}$$

$$= 14{,}5 \otimes \begin{pmatrix} 29 \\ 29{,}5 \\ 29{,}5 \\ 29{,}5 \\ 29{,}5 \\ 29{,}5 \\ 32{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \otimes v$$

b. Untuk matriks batas atas

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ 23 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon \\ 28 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 5 \end{pmatrix}.$$

Iterasinya didapatkan sebagai berikut ini:

$$\begin{array}{ccccccccc} x(0) & & x(1) & & x(2) & & x(3) & & 45 \otimes x(1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 45 \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} 62 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 73 \end{pmatrix} & = & 45 \otimes \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dengan demikian $p = 3, q = 1$ dan $c = 45$ sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{45}{3-1} = 22{,}5.$$

Dengan vektor eigen

$$v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1))$$

$$v = \bigoplus_{j=1}^{2} (\lambda^{\otimes(2-j)} \otimes x(1+j-1))$$

$$v = \left(\lambda^{\otimes(2-1)} \otimes x\,(1+1-1) \oplus \lambda^{\otimes(2-2)} \otimes x\,(1+2-1)\right)$$

$$v = (22{,}5^{\otimes(1)} \otimes x(1)) \oplus ((22{,}5^{\otimes(0)} \otimes x(2))$$

$$v = 22{,}5 \otimes x(1) \oplus 0 \otimes x(2)$$

$$v = 22{,}5 \otimes \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix} \oplus 0 \otimes \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 39{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 50{,}5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 45 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 50{,}5 \end{pmatrix}$$

Hasil diatas dapat ditunjukkan bahwa memenuhi persamaan (4.4) sehingga

$$\overline{D} \otimes v = \begin{pmatrix} 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ 23 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon \\ 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon \\ 28 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 45 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 50{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67{,}5 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 73 \end{pmatrix}$$

$$= 22{,}5 \otimes \begin{pmatrix} 45 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 45{,}5 \\ 50{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \otimes v$$

Jadi nilai eigen dari matriks **D** adalah $\lambda(\underline{D}) = 14{,}5$ dan $\lambda(\overline{D}) = 22{,}5$. Untuk vektor eigen dari matriks **D** adalah

$$\begin{pmatrix} [29,45] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [32{,}5\,,50{,}5] \end{pmatrix}.$$

Analisis Keperiodikan Sistem Jaringan Antrean *Multichannel* Tak-Siklik 5 Server

Pada tahapan 4.4 yaitu menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Interval pada matriks **D** dan diperoleh nilai eigen dari matriks **D** adalah $\lambda\left(\underline{D}\right) = 14{,}5$ dan $\lambda\left(\overline{D}\right) = 22{,}5$ serta diperoleh vektor eigen dari matriks **D** adalah

$$\begin{pmatrix} [29,45] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [32{,}5\,,50{,}5] \end{pmatrix},$$

Maka dari nilai eigen dan vektor eigen yang telah diperoleh tersebut diatas dapat dihitung sistem jaringan antrean yang periodik.

Vektor eigen yang telah diperoleh di tahapan 4.4 dipergunakan untuk menghitung sistem jaringan antrean yang periodik sebagai iterasi pertama atau $x(0)$ dan dengan nilai eigen dapat diperoleh sistem jaringan antrean yang periodik untuk memperoleh iterasi berikutnya $x(1), x(2),$ dan seterusnya.

Sehingga dapat diperoleh Sistem Jaringan Antrean *Multichannel* Tak-Siklik 5 Server yang periodik dengan iterasi sebanyak 6 iterasi berikut ini:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x(0) & & x(1) & & x(2) & & x(3) & & x(4) & & x(5) \\ \begin{pmatrix} [29,45] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [29{,}5\,,45{,}5] \\ [32{,}5\,,50{,}5] \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} [43{,}5\,,67{,}5] \\ [44\,,68] \\ [44\,,68] \\ [44\,,68] \\ [44\,,68] \\ [44\,,68] \\ [47\,,73] \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} [58\,,90] \\ [58{,}5\,,90{,}5] \\ [58{,}5\,,90{,}5] \\ [58{,}5\,,90{,}5] \\ [58{,}5\,,90{,}5] \\ [58{,}5\,,90{,}5] \\ [61{,}5\,,95{,}5] \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} [72{,}5\,,112{,}5] \\ [73\,,113] \\ [73\,,113] \\ [73\,,113] \\ [73\,,113] \\ [73\,,113] \\ [76\,,118] \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} [87\,,135] \\ [87{,}5\,,135{,}5] \\ [87{,}5\,,135{,}5] \\ [87{,}5\,,135{,}5] \\ [87{,}5\,,135{,}5] \\ [87{,}5\,,135{,}5] \\ [90{,}5\,,140{,}5] \end{pmatrix} & ; & \begin{pmatrix} [101{,}5\,,157{,}5] \\ [102\,,158] \\ [102\,,158] \\ [102\,,158] \\ [102\,,158] \\ [102\,,158] \\ [105\,,163] \end{pmatrix}. \end{array}$$

SIMPULAN

Aljabar Max – Plus Interval dapat diaplikasikan ke dalam sistem jaringan antrean *multichannel* tak – siklik 5 server. Dari nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval dari sistem jaringan antrean multichannel tak-siklik 5 server dapat diperoleh sistem jaringan antrean multichannel tak-siklik 5 server yang periodik.

SARAN

Untuk penelitian berikutnya dapat dibahas tentang aplikasi pada sistem jaringan antrean dengan asumsi yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Cassandras, C.G. (1993), *Discrete Event Systems: Modelling and Performance Analysis*, Aksen Associates Incorporated Publishers, Boston.

Cechlarova, Katarina. (2005), "Eigenvectors of Interval Matrices over Max-Plus Algebra", *Journal of discrete Applied Mathematics*, vol. 150, hal. 2 – 15.

Puri WP, Sri Rejeki. (2010). *Analisis Sistem Jaringan Antrean Dengan Elemen – Elemen Matriks Adjasen Berupa Interval Dalam Aljabar Max – Plus,* Tesis Magister Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Rudhito M. Andy and Suparwanto Ari. (2008), "Pemodelan Aljabar Max-Plus dan Evaluasi Kinerja Jaringan Antrian Fork-Join Taksiklik Dengan Kapasitas Penyangga Takhingga", *Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Pendidikan Sains 2008, Fakultas Sains Dan Matematika UKSW,* hal. B3-1 – B3-13, Januari 2008.

Subagyo, P. 2000. *Dasar – dasar Operation Research.*Yogyakarta: BPFE.

Subiono. (2000). *On classes of min-max-plus systems and their application*, Thesis Ph.D., Technische Universiteit Delft, Delft.

Subiono. (2009). *Aljabar Max-Plus*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.