ANALISIS MODEL SEI TANPA VAKSINASI PADA PENYEBARAN PENYAKIT *TUBERCULOSIS* (TBC)

Oleh:

Sri Rejeki Puri Wahyu Pramesthi

IKIP Widya Darma

Abstrak: Pada makalah ini dibahas tentang analisis model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC. Diberikan diagram kompartemen dari model SEI tersebut serta asumsi -asumsinya. Dari asumsi – asumsi yang diberikan, model matematika SEI ini dapat diperoleh. Model matematika SEI tersebut akan ditunjukkan bahwa mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil asimtotis sehingga didapatkan matriks jacobian untuk mencari nilai eigen. Nilai eigen tersebut untuk mendefinisikan bilangan reproduksi dasar (R_0). Berdasarkan teorema bahwa jika $R_0(0, p_u) < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotis lokal dan model SEI ini tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik. Jika $R_0(0, p_u) > 1$, maka model SEI ini mempunyai titik kesetimbangan endemik tunggal yang stabil asimtotis lokal. Dalam kasus ini, dapat ditunjukkan titik kesetimbangan endemik dari matriks jacobian model SEI tersebut dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sehingga titik kesetimbangan endemik stabil asimtotis lokal. Untuk simulasi dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB. Diperoleh hasil, jika parameter δ diasumsikan sebagai angka keberhasilan pengobatan dimana δ yang diberikan pada individu TBC aktif yaitu $\delta = 0{,}45$ dan $\delta = 0{,}75$, maka semakin besar δ yang diberikan akan menekan atau memperkecil penyebaran penyakit TBC.

Kata Kunci: bilangan reproduksi dasar (R_0), tanpa vaksinasi, TBC.

PENDAHULUAN

Di Indonesia resiko penularan TBC setiap tahunnya cukup tinggi. TBC menyebar lebih cepat di negara-negara berkembang. Hal ini disebabkan oleh lingkungan yang tidak sehat, semakin meningkatnya gizi buruk di sebagian negara berkembang serta munculnya epidemik HIV/AIDS di dunia. TBC penyebab kematian nomor tiga setelah penyakit kardiovaskuler (mengenai jantung) dan penyakit saluran pernafasan, dan merupakan nomor satu penyebab kematian dari golongan penyakit menular. Hasil survei menunjukkan jumlah penderita TBC di Indonesia adalah nomor tiga di dunia setelah RRC dan India.

Pada makalah ini dibahas tentang analisis model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC, dimana S_u untuk individu *susceptible* (individu yang sehat tetapi rentan tertular penyakit) tanpa vaksinasi, E_u untuk individu *latenly-infected* (individu-individu pengidap penyakit tetapi belum menularkan penyakit) tanpa vaksinasi dan I untuk individu *actively-infected* (individu-individu pengidap penyakit dan dapat menularkan penyakit atau individu TBC aktif). Lebih cepatnya penyebaran TBC mengakibatkan cukup tingginya jumlah individu I untuk individu *actively-infected* (individu-individu pengidap penyakit dan dapat menularkan penyakit atau individu TBC aktif). Hal ini membuat negara – negara berkembang mengadakan strategi pemberantasan dengan pemberian pengobatan kepada individu *actively-infected*/TBC aktif. Pemberian pengobatan pada individu TBC aktif akan menekan atau memperkecil penyebaran penyakit TBC.

TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mengetahui jika pengobatan pada individu TBC aktif diberikan, maka akan mempengaruhi tinggi rendahnya penyebaran penyakit TBC dari model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC. Dengan mempelajari model penyebaran penyakit TBC yang bertipe SEI diharapkan dapat mengetahui pola penyebaran dan mengetahui parameter-parameter yang berpengaruh terhadap tinggi rendahnya penyebaran penyakit TBC.

LANDASAN TEORI

1. Penyakit Menular

Penyakit menular dapat diklasifikasikan menjadi dua kategori besar yaitu mikroparasitisme dan makroparasitisme. Mikroparasitisme adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus dan bakteri, contohnya seperti cacar dan campak. Sedangkan makroparasitisme adalah penyakit menular yang disebabkan oleh cacing dan serangga, contohnya seperti demam berdarah dan malaria. Pada makalah ini penyakit TBC adalah jenis penyakit mikroparasitisme.

2. Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen berupa sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu tersebut sehat, tertular penyakit atau sembuh dari penyakit.

3. Model Epidemik Tipe SEI

Sebagian besar penyakit mempunyai masa latent dan masa penularan. Masa latent adalah lamanya waktu pertama kali individu tertular penyakit hingga menularkan ke seseorang. Masa penularan adalah lamanya waktu individu menularkan penyakit sebelum individu tersebut sembuh atau mati. Penyakit mempunyai masa latent yang panjang atau pendek waktunya, dimana masa ini terjadi setelah susceptible tertular tetapi belum menular ke lainnya.

Sistem persamaan diferensialnya sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \varepsilon E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E$$

Jika faktor demografi seperti laju kelahiran dan laju kematian diperhitungkan, maka sistem persamaan diferensialnya sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta IS}{N} - \mu S$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \varepsilon E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - \mu I$$

4. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata *secondary infectious individu* akibat tertular *primary infection individu* yang ada di dalam populasi susceptible. Besar kecilnya kuantitas bilangan reproduksi dasar tergantung dari beberapa faktor. Faktor-faktor itu adalah banyaknya rata-rata kontak antara individu-individu susceptible dengan individu-individu infectious dan lama terjadinya kontak.

5. Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*

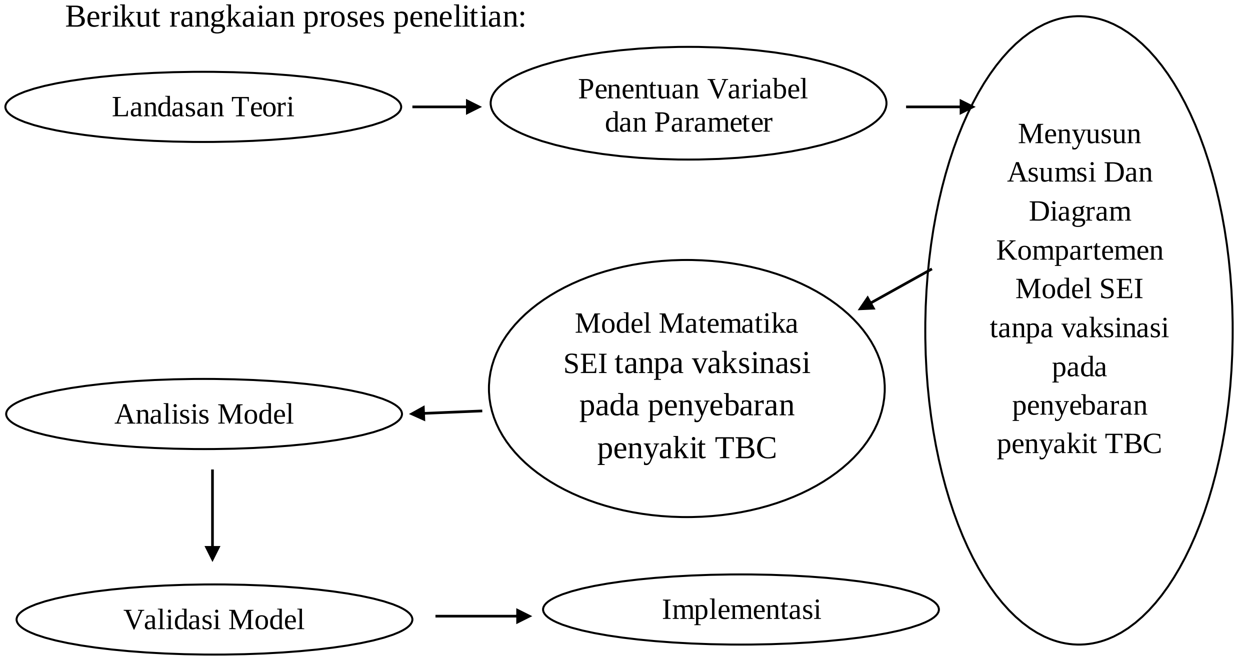
Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan system dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar – akar karakteristik secara langsung.

METODE

Dari asumsi – asumsi yang diberikan untuk diagram kompartemen model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC, model matematika SEI tersebut dapat diperoleh. Selanjutnya, model matematika SEI ini akan ditunjukkan bahwa mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil asimtotis sehingga didapatkan matriks jacobian untuk mencari nilai eigen. Nilai eigen tersebut untuk mendefinisikan bilangan reproduksi dasar (R_0). Berdasarkan teorema bahwa jika $R_0(0, p_u) < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotis lokal dan model SEI ini tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik. Jika $R_0(0, p_u) > 1$, maka model SEI ini mempunyai titik kesetimbangan endemik tunggal yang stabil asimtotis lokal. Dalam kasus ini, dapat ditunjukkan titik kesetimbangan endemik dari matriks jacobian model SEI tersebut dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sehingga titik kesetimbangan endemik stabil asimtotis lokal.

Untuk simulasi dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB. Jika parameter δ diasumsikan sebagai angka keberhasilan pengobatan dimana δ yang diberikan pada individu TBC aktif yaitu $\delta = 0{,}45$ dan $\delta = 0{,}75$, maka semakin besar δ yang diberikan akan menekan atau memperkecil penyebaran penyakit TBC.

Berikut rangkaian proses penelitian:



HASIL DAN PEMBAHASAN

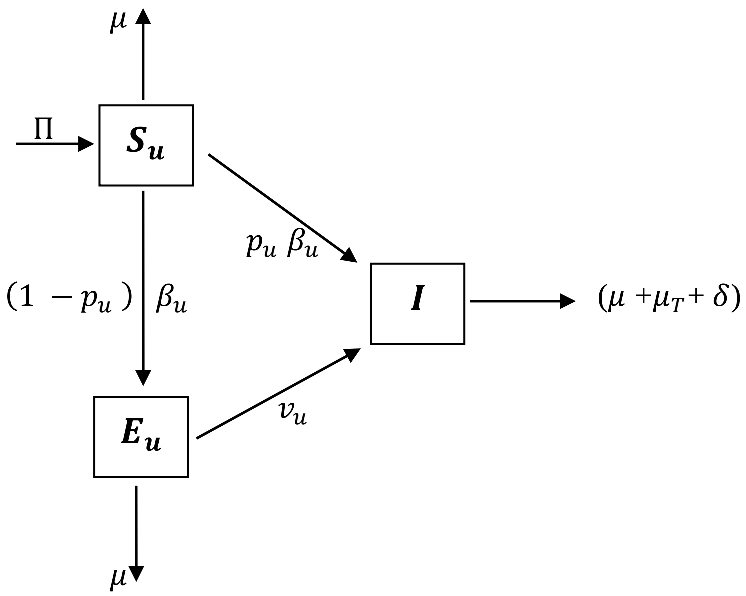
1. Asumsi – Asumsi Model SEI Tanpa Vaksinasi Pada Penyebaran Penyakit TBC

Berikut asumsi – asumsi untuk merumuskan diagram kompartemen model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC:

1. Π diasumsikan laju kelahiran perkapita
2. β_u adalah anggota dari populasi S_u yang menyatakan laju penyebaran perkapita
3. p_u adalah proporsi berkembangnya individu S_u yang tertular menjadi individu TBC aktif
4. v_u adalah angka berkembangnya populasi E_u menjadi individu TBC aktif
5. μ diasumsikan laju kematian perkapita (laju kematian alami)
6. μ_T diasumsikan laju kematian perkapita yang disebabkan oleh penyakit TBC
7. δ diasumsikan sebagai angka keberhasilan pengobatan

2. Diagram Kompartemen Model SEI Tanpa Vaksinasi Pada Penyebaran Penyakit TBC

Berdasarkan asumsi – asumsi yang telah diberikan tersebut dapat disusun diagram kompartemen sebagai berikut:



Sehingga diperoleh model matematika SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC sebagai berikut:

$$\frac{dS_u}{dt} = \Pi - p_u\,\beta_u S_u\, I - \mu S_u$$

$$\frac{dE_u}{dt} = (1 - p_u)\,\beta_u\, S_u\, I - v_u E_u - \mu E_u$$

$$\frac{dI}{dt} = p_u\ \beta_u\, S_u\, I + v_u E_u - (\mu + \mu_T + \delta)I$$

3. Analisis Model Matematika SEI Tanpa Vaksinasi Pada Penyebaran Penyakit TBC

Model matematika yang sudah diperoleh akan ditunjukkan jika $R_0(0, p_u) < 1$, maka model matematika tersebut mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit dan stabil asimtotis.

Titik kesetimbangan bebas penyakit (S_u, E_u, I) dari model matematika SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC diperoleh dengan mengambil $\frac{dS_u}{dt} = 0$, $\frac{dE_u}{dt} = 0$, dan $\frac{dI}{dt} = 0$,

sehingga

$$\Pi - p_u\,\beta_u S_u\, I - \mu S_u = 0$$

$$(1 - p_u)\,\beta_u\, S_u\, I - v_u E_u - \mu E_u = 0$$

$$p_u\ \beta_u\, S_u\, I + v_u E_u - (\mu + \mu_T + \delta)I = 0$$

Untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, maka $E_u = 0$ dan $I = 0$ sehingga

$$\Pi - p_u\,\beta_u S_u\, I - \mu S_u = 0$$

$$\Leftrightarrow \Pi = 0 + \mu S_u$$

$$\Leftrightarrow \Pi = \mu S_u$$

$$\Leftrightarrow \mu S_u = \Pi$$

$$S_u = \frac{\Pi}{\mu}$$

Jadi diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit (S_u, E_u, I) = $(\frac{\Pi}{\mu}, 0{,}0)$.

Matriks jacobian dari model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_u}{\partial S_u} & \frac{\partial S_u}{\partial E_u} & \frac{\partial S_u}{\partial I} \\ \frac{\partial E_u}{\partial S_u} & \frac{\partial E_u}{\partial E_u} & \frac{\partial E_u}{\partial I} \\ \frac{\partial I}{\partial S_u} & \frac{\partial I}{\partial E_u} & \frac{\partial I}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Maka

$$J_1 = \begin{bmatrix} -p_u\,\beta_u I - \mu & 0 & -p_u\,\beta_u S_u \\ (1-p_u)\,\beta_u I & -v_u - \mu & (1-p_u)\,\beta_u\,S_u \\ p_u\;\beta_u I & v_u & p_u\;\beta_u\,S_u - (\mu + \mu_T + \delta) \end{bmatrix}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit (S_u, E_u, I) = $(\frac{\Pi}{\mu}, 0{,}0)$ sehingga diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -p_u\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & -v_u - \mu & (1-p_u)\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & v_u & p_u\;\beta_u \frac{\Pi}{\mu} - (\mu + \mu_T + \delta) \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks jacobian adalah $|J_1 - \lambda I| = 0$, maka

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & -p_u\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & -v_u - \mu & (1-p_u)\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & v_u & p_u\;\beta_u \frac{\Pi}{\mu} - (\mu + \mu_T + \delta) \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & -p_u\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & -v_u - \mu & (1-p_u)\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & v_u & p_u\;\beta_u \frac{\Pi}{\mu} - (\mu + \mu_T + \delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer), baris kedua dikalikan dengan $\frac{v_u}{v_u + \mu}$ kemudian di jumlahkan dengan baris ketiga, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -p_u\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & (-v_u - \mu) - \lambda & (1-p_u)\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \left(\left[\left((1-p_u)\,\beta_u \frac{\Pi}{\mu}\right)\left(\frac{v_u}{v_u + \mu}\right)\right] + p_u\;\beta_u \frac{\Pi}{\mu} - (\mu + \mu_T + \delta)\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga nilai eigen dari matriks jacobian adalah

$\lambda_1 = -\mu$

$\lambda_2 = (-\, v_u - \mu)$

$\lambda_3 = \left[\left((1 - p_u)\, \beta_u \frac{\Pi}{\mu}\right)\left(\frac{v_u}{v_u + \mu}\right)\right] + p_u\, \beta_u \frac{\Pi}{\mu} - (\mu + \mu_T + \delta)$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotis jika $\lambda_3 < 0$

$$\lambda_3 = \left(\frac{(1 - p_u)\, \beta_u \Pi v_u}{\mu\,(v_u + \mu)}\right) + \frac{p_u\, \beta_u \Pi}{\mu} - (\mu + \mu_T + \delta)$$

$$= (\mu + \mu_T + \delta)\left[\left(\frac{(1 - p_u)\, \beta_u \Pi v_u}{\mu\,(v_u + \mu)(\mu + \mu_T + \delta)}\right) + \frac{p_u\, \beta_u \Pi}{\mu\,(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

$$= (\mu + \mu_T + \delta)\left[\frac{(1 - p_u)\, \beta_u \Pi v_u + (v_u + \mu) p_u \beta_u \Pi}{\mu\,(v_u + \mu)(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

$$= (\mu + \mu_T + \delta)\left[\frac{\beta_u \Pi v_u + \mu p_u \beta_u \Pi}{\mu\,(v_u + \mu)(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

$$\lambda_3 = (\mu + \mu_T + \delta)\left[\frac{\beta_u \Pi (v_u + \mu p_u)}{\mu\,(v_u + \mu)(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

Berdasarkan definisi bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata *secondary infectious individu* akibat tertular *primary infection individu* yang ada di dalam populasi susceptible, maka didefinisikan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC sebagai berikut:

$R_0(v_u, p_u) = R_0(0, p_u)$

Sehingga

$$\lambda_3 = (\mu + \mu_T + \delta)\left[\frac{\beta_u \Pi (0 + \mu p_u)}{\mu\,(0 + \mu)(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

$$= (\mu + \mu_T + \delta)\left[\frac{\beta_u \Pi (\mu p_u)}{\mu\,(\mu)(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

$$= (\mu + \mu_T + \delta)\left[\frac{\beta_u \Pi\, p_u}{\mu\,(\mu + \mu_T + \delta)} - 1\right]$$

Misal $\beta_u\, p_u = k_u$ dan $\mu + \mu_T + \delta = k_T$

Karena $\lambda_3 = k_T \left[\frac{k_u \Pi}{\mu\, k_T} - 1\right]$, maka $\lambda_3 = k_T\, [R_0(0, p_u) - 1]$

Jadi $R_0(0, p_u) = \frac{k_u \Pi}{\mu\, k_T} < 1.$

Sehingga dapat ditunjukkan bahwa model matematika SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit dan stabil asimtotis jika $R_0(0, p_u) < 1$. Berdasarkan teorema bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil asimtotis jika $R_0 < 1$, maka model SEI ini tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik. Jika $R_0(0, p_u) > 1$, maka model SEI ini mempunyai titik kesetimbangan endemik tunggal yang stabil asimtotis lokal.

Dalam kasus ini, dapat ditunjukkan titik kesetimbangan endemik dari matriks jacobian model SEI tersebut dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sehingga titik kesetimbangan endemik stabil asimtotis lokal.

Titik kesetimbangan endemik (S_u^*, E_u^*, I^*) dari model matematika SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC dapat diperoleh dengan mengambil $\frac{dS_u}{dt} = 0$, $\frac{dE_u}{dt} = 0$, dan $\frac{dI}{dt} = 0$ sehingga diperoleh $S_u^* = \frac{k_T}{k_u}$, $E_u^* = \frac{(1-p_u)(k_u\Pi - \mu k_T)}{(v_u + \mu p_u)\beta_u}$, $I^* = \frac{k_u\Pi - \mu k_T}{\beta_u k_T}$.

Matriks jacobian dari model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_u}{\partial S_u} & \frac{\partial S_u}{\partial E_u} & \frac{\partial S_u}{\partial I} \\ \frac{\partial E_u}{\partial S_u} & \frac{\partial E_u}{\partial E_u} & \frac{\partial E_u}{\partial I} \\ \frac{\partial I}{\partial S_u} & \frac{\partial I}{\partial E_u} & \frac{\partial I}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Maka

$$J_2 = \begin{bmatrix} -p_u\beta_u I - \mu & 0 & -p_u\beta_u S_u \\ (1 - p_u)\beta_u I & -v_u - \mu & (1 - p_u)\beta_u S_u \\ p_u\beta_u I & v_u & p_u\beta_u S_u - (\mu + \mu_T + \delta) \end{bmatrix}$$

dengan titik kesetimbangan endemik $(S_u^*, E_u^*, I^*) = (\frac{k_T}{k_u}, \frac{(1-p_u)(k_u\Pi - \mu k_T)}{(v_u + \mu p_u)\beta_u}, \frac{k_u\Pi - \mu k_T}{\beta_u k_T})$

sehingga diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -(\frac{p_u(k_u\Pi - \mu k_T)}{k_T} + \mu) & 0 & -p_u\beta_u\frac{k_T}{k_u} \\ (1 - p_u)\frac{(k_u\Pi - \mu k_T)}{k_T} & -(v_u + \mu) & (1 - p_u)\beta_u\frac{k_T}{k_u} \\ p_u\frac{(k_u\Pi - \mu k_T)}{k_T} & v_u & p_u\beta_u\frac{k_T}{k_u} - k_T \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks jacobian adalah $|J_2 - \lambda I| = 0$ atau $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ dengan

$a_1 = tr(J_2)$

$$a_2 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}$$

dengan J_{ij} adalah elemen baris ke – i dan kolom ke – j dari matriks J_2, dan

$a_3 = -\det(J_2)$

berarti

$a_1 = (v_u + \mu + k_T) + \frac{k_u \Pi}{k_T} - p_u\, \beta_u \frac{k_T}{k_u}$

$a_2 = (v_u + \mu)\left[\frac{k_u}{k_T}\Pi + k_T\right] + k_u \Pi - \beta_u \frac{k_T}{k_u}[2p_u\mu + v_u]$

$$a_3 = k_u \Pi(v_u + \mu) - \frac{k_T}{k_u}\mu\beta_u(v_u + \mu p_u) + 2v_u\beta_u\, \Pi(1 - p_u)$$

Kestabilan *Routh-Hurwitz* pada $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ akan memiliki akar – akar karakteristik negatif pada bagian realnya jika memenuhi syarat berikut:

1. $a_1 > 0, a_2 > 0$, dan $a_3 > 0$
2. $a_1 a_2 > a_3$

Sehingga dapat diperoleh

$$\begin{array}{c|ccc}
\lambda^3 & 1 & a_2 & 0 \\
\lambda^2 & a_1 & a_3 & 0 \\
\lambda^1 & (a_1a_2 - a_3)/a_1 & 0 & 0 \\
\lambda^0 & a_3(a_1a_2 - a_3)/(a_1a_2 - a_3) & 0 & 0
\end{array}$$

Oleh karena $a_1 > 0$, $\frac{(a_1a_2 - a_3)}{a_1} > 0$, dan $\frac{a_3(a_1a_2-a_3)}{(a_1a_2-a_3)} > 0$, jika $\mathrm{R_0(0, p_u)} > 1$, maka syarat 1 terpenuhi dan akan ditunjukkan $a_1a_2 > a_3$:

$$a_1a_2 = \left[(v_u + \mu + k_T) + \frac{k_u\Pi}{k_T} - p_u\,\beta_u\frac{k_T}{k_u}\right]\left[(v_u + \mu)\left[\frac{k_u}{k_T}\Pi + k_T\right] + k_u\Pi - \beta_u\frac{k_T}{k_u}[2p_u\mu + v_u]\right]$$

$a_1a_2 > a_3$

Terbukti $a_1a_2 > a_3$

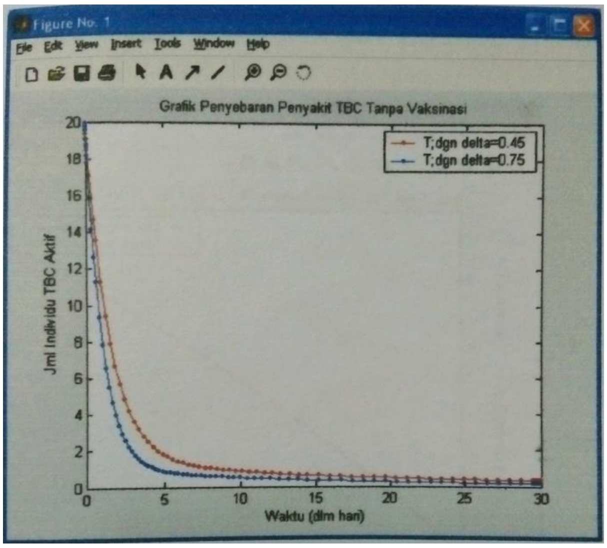
Sehingga memenuhi syarat 2. Dengan demikian semua syarat *Routh-Hurwitz* terpenuhi, maka persamaan $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ memiliki akar – akar karakteristik negatif pada bagian realnya.

Jadi $R_0(0, p_u) = \frac{k_u\Pi}{\mu\, k_T} > 1$, maka model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC mempunyai titik kesetimbangan endemik $(S_u^*, E_u^*, I^*) = (\frac{k_T}{k_u}, \frac{(1-p_u)(k_u\Pi-\mu k_T)}{(v_u+\mu p_u)\beta_u}, \frac{k_u\Pi-\mu k_T}{\beta_u k_T})$ tunggal yang stabil asimtotis lokal.

Berikut diberikan simulasi yang menunjukkan bahwa individu I untuk individu TBC aktif diberikan pengobatan dimana parameter δ diasumsikan sebagai angka keberhasilan pengobatan dengan δ yang diberikan pada individu TBC aktif yaitu $\delta = 0{,}45$ dan $\delta = 0{,}75$. Semakin besar δ yang diberikan akan menekan atau memperkecil penyebaran penyakit TBC.

4. Simulasi Model Matematika SEI Tanpa Vaksinasi Pada Penyebaran Penyakit TBC

Pada simulasi dapat dilihat garis merah menunjukkan bahwa individu TBC aktif diberikan $\delta = 0{,}45$, maka penyebaran penyakit TBC lebih tinggi apabila dibandingkan dengan garis biru dimana individu TBC aktif diberikan $\delta = 0{,}75$. Jika semakin besar pengobatan yang diberikan pada individu TBC aktif, maka semakin kecil penyebaran penyakit TBC dari individu TBC aktif.



SIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Bilangan reproduksi dasar (R_0) dalam model SEI tanpa vaksinasi pada penyebaran penyakit TBC didapatkan $R_0(0, p_u) = \frac{k_u \Pi}{\mu\, k_T}$.
   a. Jika $R_0(0, p_u) < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit $(S_u, E_u, I) = (\frac{\Pi}{\mu}, 0{,}0)$ stabil asimtotis lokal dan model SEI ini tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik.

b. Jika $R_0(0, p_u) > 1$, maka model SEI ini mempunyai titik kesetimbangan endemik $(S_u^*, E_u^*, I^*) = (\frac{k_T}{k_u}, \frac{(1-p_u)(k_u\Pi - \mu k_T)}{(v_u+\mu p_u)\beta_u}, \frac{k_u\Pi - \mu k_T}{\beta_u k_T})$ tunggal yang stabil asimtotis lokal.

2. Penyakit TBC tidak akan menjadi endemik disuatu populasi asalkan bilangan reproduksi dasar $R_0(0, p_u) < 1$.
3. Pada simulasi menunjukkan bahwa individu TBC aktif diberikan $\delta = 0{,}45$, maka penyebaran penyakit TBC lebih tinggi apabila dibandingkan dengan individu TBC aktif yang diberikan $\delta = 0{,}75$.

Dapat disimpulkan bahwa:

Penyebaran penyakit TBC tidak akan terjadi jika $R_0(0, p_u) < 1$ dan semakin besar δ (angka keberhasilan pengobatan) yang diberikan pada individu TBC aktif akan menekan atau memperkecil atau mengurangi penyebaran penyakit TBC.

SARAN

Dari hasil penelitian ini diharapkan kepada masyarakat, bahwa individu TBC aktif harus melakukan pengobatan agar dapat mengurangi tingkat kematian dan dapat mengurangi penyebaran penyakit TBC. Untuk penelitian selanjutnya dapat dibahas tentang pengoptimalan tingkat vaksinasi dan pengoptimalan angka keberhasilan pengobatan.

DAFTAR PUSTAKA

Departemen Kesehatan RI. 2002. *Pedoman Nasional Penanggulangan Tuberculosis, cetakan ke 8*. Jakarta.

Departemen Kesehatan dan Kesejahteraan Sosial. 2002. *Pedoman Pelaksanaan Program Imunisasi Di Indonesia*. Jakarta.

Grimshaw, R. 1989. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Blackwell Scientific Publications. Oxford London Edinburgh. Boston Melbourne.

Moghadas, S. M dan Gumel, A. B. 2002. *Analysis of A Model For Transmission Dynamics of TB, volume 10, number 3*. Canadian Applied Mathematics Quarterly.

Reyne, S. K. 2004. *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Dinamika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah*. Skripsi. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.

Puri W. P, S. R. 2007. Analisis Pada Model Penyebaran Penyakit *Tuberkulosis*. Skripsi. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.